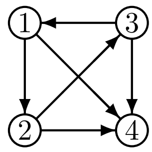
Feuille de TD N^o 1 : Généralités

1 Combinatoire

- Quel est le nombre d'arêtes d'un graphe non-orienté complet d'ordre n ?
  Quel est le nombre d'arcs d'un graphe orienté complet d'ordre n ?
- $|S_1|=n_1$, $|S_2|=n_2$. Quel est le nombre d'arêtes du graphe non-orienté (S_1,S_2) biparti complet ?
- (maison) Montrer que si un graphe biparti $G(S_1, S_2, A)$ est k-régulier, avec $k > 0$, alors $|S_1| = |S_2|$.
  Indication, comptez quelque chose de deux manières différentes et dire que le résultat est le même.
- (maison) G est un graphe non-orienté complet à 6 sommets, dont les arêtes sont coloriées, soit en bleu, soit en rouge. Montrez que G contient un triangle monochrome.
  Indication : il y a des sommets x, $y1$ $y2$ $y3$ tq $(x, y1)$, $(x, y2)$ et $(x, y3)$ sont de la même couleur. Pourquoi ? Et donc ?
- Soit $d_1, d_2, \ldots, d_n$ les degrés des sommets d'un graphe G. Montrez que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$.
- Montrez que dans un graphe G, il y a toujours un nombre pair de sommets de degré impair.
- (maison) Montrez que tout graphe non-orienté avec au moins deux sommets possède au moins deux sommets de même degré.
  Indication : combien y a-t-il de sommets ? de degrés différents possibles ? Et donc ? Résoudre la difficulté qui apparait.

2 Représentations



- Soit le graphe G suivant :
  1. Donnez sa matrice d'adjacence.
  2. Representez ce graphe par sa liste d'adjacence (les sommets d'une liste d'adjacence sont rangés consécutivement dans des tableaux).
- Comparez les deux représentations en terme d'efficacité (espace mémoire, complexité en temps pour savoir si $i \to j$, pour connaître $deg^+(s)$, $deg^-(s)$, pour énumérer tous les successeurs, tous les prédécesseurs d'un sommet s).
- M est la matrice d'adjacence de G et K un entier. Que représente M^K ?
  Combien de produits de matrices faut-il effectuer pour la calculer ?
  (maison) Si G possède N sommets, combien de produits de matrices faut-il pour calculer sa clôture transitive et réflexive (matrice qui aura un 1 en case (x, y) ssi y est accessible depuis x) ? sa clotûre transitive (1 en case (x, y) ssi il y a un chemin non vide de x à y)
  Indication : $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)\ldots. =?$
- Soit un graphe G, codé par les listes d'adjacence utilisant deux tableaux `Tete` et `Succ` (le tableau `Tete` à n elements donne pour tout sommet l'indice dans `Succ` où finissent ses successeurs).

```
pour y := 1 a n
    pour k := Tete[y-1]+1 a Tete[y]       /* avec gendarme Tete[0]=0 */
        si Succ[k] = x alors
            write(x, 'a pour predecesseur ', y);
        fin_si;
    fin_pour;
fin_pour;
```

  1. Qu'affiche l'algorithme ci-dessus ?
  2. Quelle est sa complexité ?
  3. Modifiez l'algorithme pour construire les listes de prédécesseurs, en faisant varier x de 1 a n. Quelle est la complexité du nouvel algorithme ?
  4. Donnez un algorithme qui calcule en temps $\theta(m + n)$ les degrés ENTRANTS de tous les sommets et les range dans un tableau DegInf[1..n].
  5. (maison) Donnez un algorithme qui construit les listes de prédécesseurs en temps $\theta(m + n)$.

3 Algorithmes

On supposera que l'on peut faire la liste de tous les sommets en temps $\theta(n)$, et qu'on peut faire la liste des voisins d'un sommet s en un temps $\theta(\text{degré}(s))$.

- Le rayon en u d'un graphe est $max\{$ distance de u à $v \mid v \in S\}$.
  Donner un algorithme **linéaire** pour calculer le rayon en u d'un arbre.

- (maison) Le diamètre d'un graphe est $max\{$ distance de u à $v \mid u, v \in S\}$.
  Donner un algorithme **linéaire** pour calculer le diamètre d'un arbre.
  Indication : remonter deux informations en parallèle lors d'un parcours

4 Récurrences

On appelle arbre binaire un arbre enraciné ordonné dans lequel chaque noeud a soit 2 fils, soit aucun. On considère la proposition Q suivante:

Q : Dans un arbre binaire de profondeur p, toutes les feuilles sont à la profondeur p.

W propose de montrer Q par récurrence sur la profondeur de l'arbre: C'est vrai si l'arbre est de profondeur 0 (c'est l'arbre réduit à une feuille). Supposons Q vraie pour les arbres de profondeur p. On construit alors un arbre A de profondeur $p+1$ en prenant la racine, en mettant à sa gauche un sous-arbre AG de profondeur p et à sa droite un arbre AD de profondeur p. A est bien de profondeur $p+1$. Par hypothèse de récurrence, toutes les feuilles de AG et de AD sont à profondeur p dans AG et dans AD. Elles sont donc à profondeur $p+1$ dans A. Comme il n'y a pas dans A d'autres feuilles que celles de AG et de AD, le résultat est prouvé.

1. La proposition Q étant clairement fausse, quelle est l'erreur de W ?
2. Que se passe-t-il pour les arbres binaires complets ?

5 Arbres

On rappelle qu'en graphes, on appelle arbre un graphe non-orienté, non-vide, connexe et sans cycle (ne pas confondre avec la définition d'arbres enracinés, par exemple binaires, vue en algo.)

- Montrez qu'un graphe admet un arbre couvrant si et seulement si il est connexe.
- Montrez que tout arbre d'ordre $n \geq 2$ a au moins 2 sommets pendants. 6 preuves sont possibles.