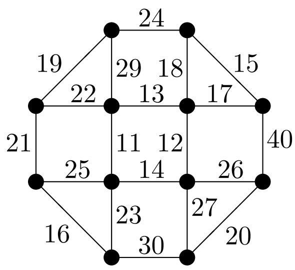
Graphes, TD N^o 3 : Arbres Couvrants Minimaux

1

Faire tourner l'algorithme de Kruskal et celui de Prim (partir du sommet en dessous de l'arête 40) sur le graphe suivant:



2

Pour chaque question, donnez une preuve directe et une autre qui utilise les propriétés vues en cours des algorithmes de Prim et de Kruskal.

- Montrez que s'il existe une seule arête de poids minimal, alors elle appartient à tous les arbres couvrants minimaux du graphe.
- Montrez que si a est une arête minimale, alors il existe un ACM qui la contient.
- Soit a une arête de poids minimal. Montrez qu'il existe un ACM T ne contenant pas a ssi il existe un cycle ne contenant que des arêtes de poids minimal et qui contient a.

3

Un graphe $G = (S, A)$ et une pondération w sont donnés. Soit a une arête de G, on note G_a le graphe G privé de l'arête a. i.e. $G_a = (S, A - \{a\})$. La pondération est conservée pour G_a. On suppose que G_a (et donc a forciori G) est connexe.

- On dispose de T_a un ACM pour G_a. Comment en déduire un ACM T pour G ?
- On dispose de T un ACM pour G. Comment en déduire un ACM T_a pour G_a ?

4

S'il y a unicité de l'arbre couvrant T minimal, peut-il y avoir deux arêtes de même poids ? En particulier, peut-il y avoir deux arêtes de même poids (1) qui sont toutes les deux dans T ? (2) dont aucune n'est dans T ? (3) dont une seule est dans T ?

5

Soit G un graphe non orienté valué connexe, non réduit à un arbre Soit T un arbre couvrant minimal. Soit C un cycle.

(a) On suppose que toutes les valuations de G sont différentes. Montrez que l'arête de poids maximum de C n'est pas dans T.

(b) On ne suppose plus que toutes les valuations de G sont différentes. Montrez qu'il y a au moins une arête de poids maximum de C qui n'est pas dans T, et que pour toute arête a de poids maximum de C, il y a un ACM $\overline{T}$ qui ne la contient pas.