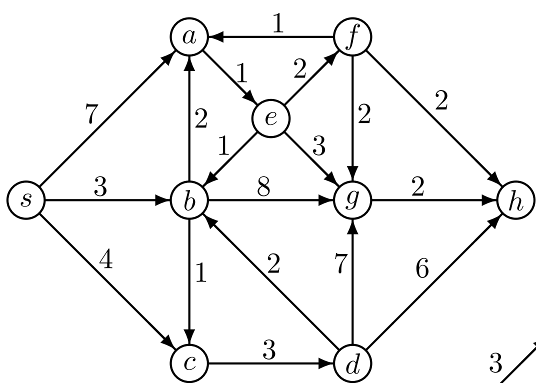
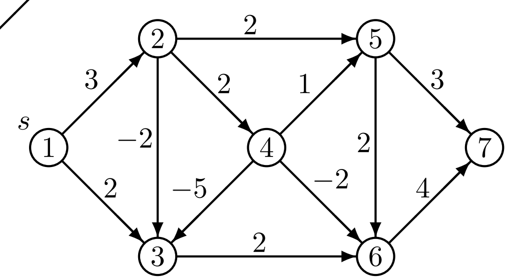
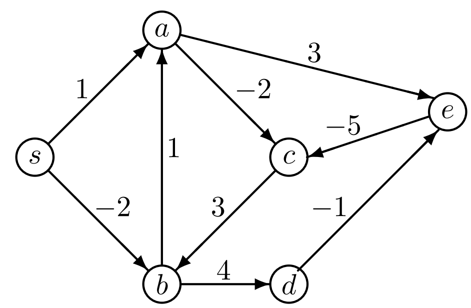
Feuille de TD N^o 4 : Plus courts chemins

1. Utilisez les algorithmes du cours pour déterminer, pour chacun des graphes ci-dessous, une arborescence de plus courts chemins du sommet s à tous les autres.







2. Dans un pays où la sécurité des chemins n'est pas assurée, on doit aller d'une ville X à une ville Y. Le réseau routier est donné par un ensemble de villes et un ensemble de tronçons de routes joignant ces villes. Pour chaque tronçon t de route, on connait la probabilité P_t de se faire dépouiller sur le tronçon. Comment trouver le chemin de X à Y qui minimise la probabilité de se faire dépouiller ?

3. Donner un algorithme qui prend en entrée un graphe $G = (S, A)$ avec des coûts $w(e)$ éventuellement négatifs sur les arcs, détecte la présence éventuelle d'un cycle absorbant et donne le cas échéant un tel cycle.

4. Si tous les arcs ont des poids différents, l'arbre des plus courts chemins à partir de s est-il unique ?

   (maison) Parmi les n (ou plus) arbres de plus courts chemins, au moins l'un d'eux est-il arbre couvrant minimal ?

5. Donner un algorithme linéaire qui prend en entrée un graphe orienté $G = (S, A)$, pondéré par $w : E \to I\!R$, un sommet $s \in S$ et un tableau $T[S]$ de réels et qui teste si pour tout $v \in S$, $T[v]$ est la distance de s à v.

6. Proposer un algorithme qui ramène le calcul des plus courts chemins depuis une source pour les graphes à valuation dans $I\!N^*$, à un parcours en largeur. Cet algorithme est-il compétitif face à l'algorithme de Dijkstra ?

7. Soit le graphe dont la matrice d'adjacence est :

   (rappel : $A[i, j]$ représente le poids de l'arête de i vers j, et vaut infini si elle n'existe pas) :

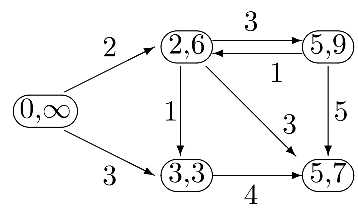
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 1 & 3 \\ 4 & \infty & 4 & 1 & 3 \\ 3 & \infty & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & \infty & 0 & \infty \end{bmatrix}$$

   Rappeler l'algorithme de Floyd-Roy-Warshall et l'utiliser pour calculer la matrice des PCC de tout sommet à tout sommet. Observer comment le plus court chemin de 3 à 2 a été trouvé.

8. **Deuxième distance** (exam 2015-16)

   Soit G un graphe valué et s un sommet. Pour tout sommet t, on note $d[t]$ la distance de s à t, i.e. la longueur du plus court chemin de s à t, et $d2[t]$ la deuxième distance de s à t, i.e. la longueur du deuxième plus court chemin de s à t.

   Exemple, dans le graphe ci-dessous, s est le sommet à gauche, la distance et la deuxième distance sont notées sur les sommets.



   (A) Le graphe G est supposé sans cycle absorbant.

   Complétez le code ci-dessous (Bellman-Ford) pour calculer les tableaux d et $d2$.

```
pour tout sommet t, d[t] <- infini
d[s] <- 0
pred[s] <- inexistant

faire n fois :
   pour tous les sommets y faire
      pour tout successeur z de y faire
         si d[z] > d[y] + w(y,z)
         alors   d[z] <- d[y] + w(y,z)
                 pred[z] <- y
```

   (B) Les valuations de G sont supposées positives.

   Complétez le code ci-dessous (Dijkstra) pour calculer les tableaux d et $d2$.

```
pour tout sommet t, d[t] <- infini
d[s] <- 0
E <- S

faire n fois :
   soit y dans E tq d[y] minimise { d[w] | w dans E }
   E <- E - { y }
   pour tout successeur z de y faire
      si d[z] > d[y] + w(y,z)
      alors   d[z] <- d[y] + w(y,z)
```