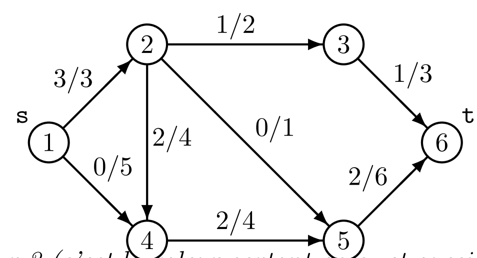
Feuille de TD N^o 5 : Flots

1

Le réseau de transport $G(S, A, C, \mathtt{s}, \mathtt{t})$ ci-dessous, avec $\mathtt{s} = 1$ (la source), $\mathtt{t} = 6$ (le puits) et un flot ϕ de débit 3. Dans le couple de valeurs numériques sur chaque arc, le premier nombre désigne le flot et le second, la capacité.

1. Donner le graphe d'écart $G^e(\phi)$ associé à ϕ.
2. Trouver un chemin de $\mathtt{s}$ à $\mathtt{t}$ dans $G^e(\phi)$.
3. Comment peut-on augmenter le flot dans G ?
4. Calculer le flot maximal
5. Donner une coupe minimale



- *On note que le flot déjà présent sur le graphe est de valeur 3 (c'est la valeur sortant en s, et aussi la valeur entrant en t).*
  En construisant le graphe d'écart, on n'oublie de rajouter des arêtes inverses partout où on a fait passer un flot.
  On cherche un chemin de s à t dans le graphe d'écart par un parcours en largeur ; on trouve celui-ci : $1 \to 4 \to 5 \to 6$. *Sa capacité (i.e le min des capacités des arêtes est 2, on peut donc ajouter un flot de 2 sur ce chemin.*
  On cherche ensuite un chemin de s à t sur le nouveau graphe d'écart, et on trouve le chemin $1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 6$, *de capacité 1.*
  On répète l'opération, et on trouve le chemin $1 \to 4 \to 2 \to 5 \to 6$, *de capacité 1.*
  Enfin, le graphe d'écart donné après tous ces ajouts ne contient aucun chemin de s à t. On peut donc arrêter l'algorithme : on a obtenu un flot maximal. Sa valeur est donnée par la valeur de départ à laquelle on ajoute les flots placés sur chacun des chemins considérés : on obtient une valeur de $3 + 2 + 1 + 1 = 7$.

  Enfin, comme une coupe minimale entre s et t a forcément toutes ses arêtes saturées par le flot maximal, on peut trouver une telle coupe en faisant un parcours à partir de s dans le graphe auquel on enlève toutes ses arêtes saturées : on obtient la coupe $\{1, 4\}, \{2, 3, 5, 6\}$, *qui a bien une valeur de ses arêtes de 7.*
  On note qu'il existe une autre coupe minimale : $\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 6\}$.

2

ouvrier(s)	qualifié(s) pour
x_1	y_1, y_2, y_4
x_2	y_1, y_2, y_4
x_3	y_1, y_2, y_4, y_7
x_4	y_2, y_3, y_4, y_5, y_6
x_5	y_2, y_4
x_6	y_3, y_4, y_5, y_6, y_7
x_7	y_5, y_6, y_7

Une entreprise employant sept ouvriers $x_1, \ldots, x_7$ doit effectuer sept travaux $y_1, \ldots, y_7$. Le tableau ci-contre donne les différentes affectations possibles : L'entreprise peut-elle réaliser les sept travaux ? Dans l'affirmative, comment doit-elle affecter les ouvriers aux postes de travail ? x_1 préfèrerait faire y_4, et x_4 préfèrerait faire y_2. Peut-on satisfaire leurs souhaits ?

- *Le problème correspond à un problème de couplage dans un graphe biparti G : on pose* $S_1 = \{x_1, \ldots, x_7\}$ *et* $S_2 = \{y_1, \ldots, y_7\}$, $S = S_1 \cup S_2$, *et on met une arête entre* x_i *et* y_j *ssi l'ouvrier* x_i *est qualifié pour la tâche* y_j. *L'entreprise peut effectuer les sept travaux en parallèle ssi il existe un couplage parfait dans G.*
  On va montrer comment transformer un problème de couplage quelconque en problème de flot entier. Dans le cas général, G a pour ensembles de sommets $S_1 = \{x_1, \ldots, x_k\}$ *et* $S_2 = \{y_1, \ldots, y_l\}$ *(avec k et l non nécessairement égaux).*

  Créons maintenant un graphe G' *à partir de G : on ajoute un sommet s et un sommet t, et les arêtes* $s \to x_i$ *pour tout i et* $y_j \to t$ *pour tout j. Ainsi, s est relié à tous les* x_i *et tous les* y_j *sont reliés à t. Associons maintenant à* G' *une capacité c telle que toutes les arêtes ont pour capacité 1.*

Supposons qu'on dispose d'un flot f entier sur G' respectant c. Alors toute arête porte un flot compris entre 0 et 1, donc une arête est parcourue soit par un flot de valeur 1, soit par aucun flot. Considérons $C = \{(x_i, y_j) \mid f(x_i \to y_j) = 1\}$, et montrons que C donne un couplage de G. Il suffit pour cela de vérifier que pour tout i, x_i apparaît au plus une fois dans C, et pour tout j, y_j apparaît au plus une fois dans C.
Or comme f est un flot et quel que soit i, x_i a une unique arête entrante $s \to x_i$ de capacité 1, on sait que $\sum_j f(x_i \to y_j) \leqslant 1$, donc comme c'est une somme de valeurs toutes entières et positives, au plus une d'entre elles vaut 1. Donc x_i apparaît au plus une fois dans C.
De même, comme quel que soit j y_j a une unique arête sortante $y_j \to t$ de capacité 1, y_j ne peut apparaître qu'au plus une fois dans C.
Donc C est bien un couplage de G, et tout flot entier dans G' nous donne un couplage dans G.

Inversement, considérons C un couplage dans G, construisons une fonction f sur les arêtes de G' de la façon suivante :
— *pour tout i, $f(s \to x_i) = 1$ si x_i apparaît dans C et 0 sinon ;*
— *pour tout j, $f(y_j \to t) = 1$ si y_j apparaît dans C et 0 sinon ;*
— *pour i, j tq $x_i \to y_j$ est une arête, $f(x_i \to y_j) = 1$ si $(x_i, y_j) \in C$ et 0 sinon.*
Vérifions que f est bien un flot : on constate d'abord que comme pour toute arête $u \to v$ on a $c(u \to v) = 1$ et $f(u \to v) \in \{0, 1\}$, on a bien $f(u \to v) \leqslant c(u \to v)$.
De plus, soit x_i un sommet, alors si x_i apparaît dans C, il y a un flot entrant de 1 (provenant de s) et un flot sortant de 1 (allant vers y_j tq $(x_i, y_j) \in C$), et si au contraire x_i n'apparaît pas dans C alors toutes les arêtes entrant et sortant de x_i ne portent aucun flot, donc dans tous les cas la conservation du flot est respectée.
De même, pour y_j un sommet, le flot entrant est de 1 si y_j apparaît dans C (provenant de x_i tq $(x_i, y_j) \in C$) et 0 sinon, et celui sortant est de 1 si y_j apparaît dans C (allant vers t) et 0 sinon, donc la conservation du flot est également respectée.
Donc tout couplage de G donne un flot entier dans G'.

On note enfin que ces fonctions sont réciproques l'une de l'autre et donne donc une bijection de l'ensemble des flots entiers sur G' vers l'ensemble des couplage de G, et en considérant la coupe $\{s, x_1, \ldots, x_k\}, \{y_1, \ldots, y_l, t\}$ (dans laquelle toutes les arêtes vont du premier ensemble vers le second), on vérifie que al valeur du flot correspond au cardinal du couplage associé.
Ainsi, il y a équivalence par cette bijection entre un flot maximal et un couplage maximal. De plus, si $k = l$, il existe un couplage parfait de G ssi le flot maximal dans G' est de valeur k.

Revenons à notre problème initial : une application d'un algorithme de flot ou une résolution à la main donnent le couplage parfait suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
y_4	y_1	y_7	y_3	y_2	y_5	y_6

On note qu'on peut respecter la demande de x_1 mais pas celle de x_4, puisque si on a un couplage parfait les tâches y_1, y_2 et y_4 sont attribuées aux ouvriers x_1, x_2 et x_5.

3

Soit $\langle S, A, C, s, t\rangle$ un réseau de transport sur lequel on dispose d'un flot maximum f.

1) On incrémente la capacité de $(u, v) \in A$: $c(u, v) \leftarrow c(u, v) + 1$. Donner un algorithme linéaire qui prend en argument (S, A, c, s, t) et f et calcule un flot maximum f' pour le réseau où la capacité de l'arc (u, v) a été incrémentée.

2) On décrémente la capacité de $(u, v) \in A$: $c(u, v) \leftarrow c(u, v) - 1$. Donner un algorithme linéaire qui prend en argument (S, A, c, s, t) et f et calcule un flot maximum f' pour le réseau où la capacité de l'arc (u, v) a été décrémentée.

- *On suppose que toutes les capacités sont entières.*
  1) Considérons le graphe d'écart du flot f dans le nouveau graphe (G, c'). Si dans ce graphe d'écart il n'existe pas de nouveau chemin entre s et t, c'est que le flot est maximal et on peut s'arrêter.
  Si il existe un nouveau chemin C, alors sa capacité est d'au moins 1, et on peut donc ajouter une unité de flot sur toutes les arêtes de C pour obtenir un nouveau flot f' de valeur strictement supérieur à celle de f. Or une coupe quelconque du graphe (G, c') a une valeur égale à celle de la même coupe dans (G, c) ou vaut une unité supplémentaire (ça dépend de si l'arête (u, v) est dans la coupe ou non). En particulier, les coupes minimales de (G, c') ont soit la même valeur que celles de (G, c), soit une unité de plus. Par le théorème flot-max/coupe-min, ça signifie que $f_{max}(G, c) \leqslant f_{max}(G, c') \leqslant f_{max}(G, c) + 1$. Donc la valeur de f' est au moins $f_{max}(G, c) + 1$ (car f est maximal dans (G, c)) et au plus $f_{max}(G, c') \leqslant f_{max}(G, c) + 1$. On en déduits que f' est un flot maximal pour (G, c').

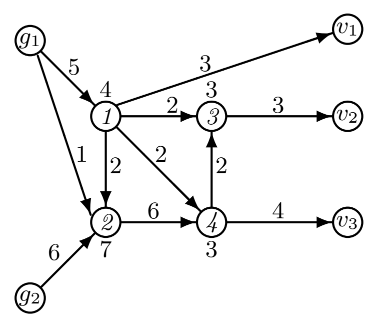
L'opération de recherche de chemin se fait par un parcours du graphe d'écart et est donc bien en temps linéaire, donc l'algorithme dans son ensemble est linéaire.
2) On a de nouveau deux cas. D'abord, par un raisonnement sur les coupes minimales similaire à celui de la question précédente, on obtient que $f_{max}(G,c) - 1 \leqslant f_{max}(G,c') \leqslant f_{max}(G,c)$. Donc si $f(u,v) < c(u,v)$ (i.e l'arête (u,v) n'était pas saturée), f est toujours un flot pour (G,c') et c'est un flot maximal. On n'a donc pas besoin de modifier f.
Mais si (u,v) était saturé, il faut réduire le flot passant par cette arête. Pour cela, on cherche un chemin de s à t passant par (u,v) et dont toutes les arêtes sont traversée par un flot non nul dans f (un tel chemin existe, sinon on aurait $f(u,v) = 0$ et (u,v) ne pourrait pas être saturée). On réduit ensuite le flot d'une unité sur ce chemin pour obtenir un flot global f' de valeur inférieur d'une unité à celle de f.
On construit enfin le graphe d'écart de f' sur (G,c'), et on cherche un chemin entre s et t dedans. Si un tel chemin n'existe pas, c'est que le flot f' est maximal, on peut donc s'arrêter là. Si en revanche un tel chemin existe, alors on construit un flot f'' en augmentant de 1 la valeur de f' sur tout le chemin. La valeur de f'' est alors strictement supérieure à celle de f', donc est supérieure ou égale à celle de f, donc elle est égale à celle de f et maximale.
Pour effectuer cet algorithme, on effectue trois recherches de chemins, donc trois parcours : un entre s et u et un entre v et t pour trouver un chemin contenant du flot entre s et t passant par (u,v), et un pour chercher un chemin entre s et t dans le graphe d'écart de f'. L'algorithme peut donc bien être réalisé en temps linéaire.

4 Généralisations

On propose deux généralisations au problème du flot max :
(1) Il peut y avoir plusieurs sources $s_1, s_2, \dots s_m$ et plusieurs puits $t_1, t_2, \dots t_\ell$.
(2) Non seulement les arcs mais aussi les sommets ont des capacités.
Comment utiliser un logiciel qui résoud le problème du flot maximum classique pour résoudre un problème de flot maximum généralisé ?

- *(1) On ajoute une "super-source" s et un "super-puits" t, et des arêtes de capacité infinie $(s,s_1),\dots,(s,s_m)$ entre s et les sources multiples, et $(t_1,t),\dots,(t_l,t)$ entre les puits multiples et t.*
  (2) On dédouble chaque sommet u en u_1 et u_2, en séparant les arêtes entrantes et sortantes : les arêtes entrantes arrivent en u_1 et les arêtes sortantes partent de u_2. On ajoute également une arête dont la capacité est celle de u entre u_1 et u_2. Ainsi, tout le flot passant par u va entrer en u_1, passer par l'arête (u_1,u_2) et ressortir de u_2, et donc va être limité par la capacité de l'arête au milieu.

  Application : Deux usines à gaz, g_1 et g_2, alimentent trois villes, v_1, v_2 et v_3, par l'intermediaire du réseau de distribution ci-dessous ; les nombres associés aux arcs et aux sommets de ce réseau représentent les capacités journalières.
  Quelle est la production journalière maximale que peuvent écouler ces deux usines ? Si cette production est atteinte, à quelle consomation journalière chacune des villes peut-elle prétendre ?



5 Distribution de jouets

Un comité d'entreprise a décidé de distribuer de petits jouets aux enfants des salariés pour Noël.
Il a en sa possession différents jouets J_1, ..., J_p, chaque jouet J_i étant disponible en n_i exemplaires.
Il y a k enfants $e_1, ..., e_k$.
Le comité d'entreprise a fait une enquête auprès des parents, qui ont donné le sexe, l'age, les jouets déjà en possession et les goûts de leur(s) enfant(s), ce qui a permis de savoir pour chaque jouet J_i et chaque enfant e_h si le jouet convenait pour l'enfant.
Le comité a décidé de donner un paquet cadeau de P jouets à chaque enfant.

Il est évidemment hors de question de distribuer deux fois le même jouet à un même enfant.

On veut un algorithme qui permette au comité de trouver une manière de composer les paquets cadeaux (ou qui détecte que ce n'est pas possible). Expliquer comment ramener ce problème à un problème de graphes qui se résoud en temps polynomial.

- *On construit le graphe G suivant :*
  - *un sommet s et un sommet t ;*
  - *un sommet J_i par type de jouet ;*
  - *un sommet e_h par enfant ;*
  - *une arête (s, J_i) pour tout i de capacité n_i ;*
  - *une arête (e_h, t) pour tout h de capacité P ;*
  - *une arête (J_i, e_h) pour tous i, h tq le jouet i convient à l'enfant h de capacité 1.*

  Un flot f donne une distribution de jouet en donnant le jouet J_i à l'enfant e_h ssi $f(J_i, e_h) = 1$. Cette distribution respecte les règles suivantes :
  - *comme chaque J_i a un flot entrant d'au plus n_i (donc un flot sortant similairement limité), on distribue au plus n_i jouets J_i en tout ;*
  - *comme comme e_h a un flot sortant d'au plus P (donc un flot entrant de même), on ne distribue pas plus de P jouets à chaque enfant ;*
  - *comme il n'y a qu'une arête entre J_i et e_h et seulement si J_i convient à e_h, chaque enfant reçoit au plus un exemplaire de chaque jouet, et seulement des jouets qui lui conviennent.*

  De même, chaque distribution respectant ces conditions correspond à un flot dans G.
  Une telle distribution correspond aux souhaits du CE ssi tous les enfants reçoivent P jouets, i.e si la valeur totale du flot vaut kP (elle ne peut pas valoir plus). Donc on peut résoudre ce problème de distributions en faisant une recherche de flot maximal dans G, et on sait qu'on peut obtenir une solution satisfaisante ssi $f_{max}(G) = kP$.

On ajoute une nouvelle contrainte : des enfants qui sont frères ou sœurs l'un de l'autre doivent recevoir des jouets tous différents.

Expliquer comment intégrer cette nouvelle contrainte.

- *Pour respecter cette nouvelle contrainte, il faut s'assurer qu'un même jouet, même si il convient à plusieurs enfants d'une même famille, ne peut être attribué qu'à un seul enfant de cette famille.*
  Pour cela, si plusieurs enfants $e_{h_1}, \ldots, e_{h_l}$ d'une même famille ont indiqué vouloir le même jouet J_i, on enlève les arêtes $(J_i, e_{h_1}), \ldots, (J_i, e_{h_l})$, on ajoute un sommet auxiliaire a qui reçoit une arête de capacité 1 venant de J_i et on ajoute des arêtes de capacité 1 $(a, e_{h_1}), \ldots, (a, e_{h_l})$. On donnera alors un jouet J_i à l'enfant e_{h_j} ssi l'arête (a, e_{h_j}) est parcourue par une unité de flot.

6

Soient π_1 et π_2 deux partitions d'un ensemble X à m éléments, chaque partition étant constituée de r classes disjointes. On voudrait trouver un ensemble $Y \subset X$, à r éléments tel que pour chaque classe C de π_1 ou de π_2, il existe un élément de $y \in Y$ qui appartienne (représente) C.

Est-ce toujours possible ? Donner un algorithme efficace pour résoudre ce problème.

- *On appelle $Y \subseteq X$ un ensemble de* représentants *si il satisfait à la condition de l'énoncé.*
  Il n'existe pas toujours de tel ensemble : par exemple, si $X = \{a, b, c, d\}$, $\pi_1 = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\big\}$ et $\pi_2 = \big\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\big\}$, il n'existe visiblement pas d'ensemble Y à trois éléments permettant de représenter à la fois π_1 et π_2.
  On pourrait théoriquement tester tous les sous-ensembles de X à r éléments et vérifier pour chacun si il convient jusqu'à trouver (ou non) un ensemble de représentants, mais il y a $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ tels ensembles et ce n'est pas une complexité raisonnable.
  On peut en revanche transformer ce problème en un problème de couplage parfait dans un graphe biparti : à chaque ensemble de π_1 et chaque ensemble de π_2 on associe un sommet, puis à chaque élément x de X on associe une arête reliant la classe de x dans π_1 et la classe de x dans π_2 (on note qu'on peut obtenir un multigraphe, i.e plusieurs arêtes peuvent relier deux mêmes points, mais ça ne change pas le problème). Un couplage parfait correspond exactement à un ensemble de représentants.
  On résout ensuite le problème de couplage de la même façon qu'on avait expliqué dans l'exercice 2, et en récupérant les étiquettes des arêtes du couplage parfait si on en trouve un, on obtient un ensemble de représentants.

7

L'étudiant Z propose l'algorithme suivant pour calculer la valeur du flot maximal dans un réseau $G(S, A, C, \mathtt{s}, \mathtt{t})$: On regarde toutes les coupes possibles et on prend la valeur minimale des capacités de ces coupes. Qu'en pensez-vous ?

- *Grâce au théorème flot-max/coupe min, on sait que cet algorithme est correct, mais comme le nombre de coupes possibles est 2^{n-2}, cet algorithme est d'une complexité beaucoup trop importante pour être intéressant.*

8 Dictateur K

(examen de 2011...) Dans un pays L, des rebelles ont pris possession d'une ville B. Le dictateur du pays K a positionné des chars dans le désert, autour de B. Les chars ne peuvent emprunter que le graphe du réseau routier. Une coalition internationale O décide de soutenir les rebelles en bombardant des tronçons de route, de sorte qu'aucun char ne puisse plus accéder à B. Pour chaque tronçon de route, O a attribué un coût (qui tient compte des risques, de la quantité d'explosif nécessaire pour neutraliser la route, etc.) Comment déterminer efficacement l'ensemble des routes qu'il faut bombarder pour empêcher K d'accéder à B tout en minimisant la somme des coûts ?

- *On cherche à trouver une façon d'isoler complètement la ville B des positions des chars en minimisant les valeurs (ici un coût de destruction) des arêtes supprimée : on est en train de chercher une coupe minimale entre B et les positions des chars. On peut donc bien réduire ce problème à un problème de flots.*

9 Théorème de Hall

Montrez qu'un graphe biparti ($G = (U \cup U', E)$ admet un couplage parfait si et seulement si $|U| = |U'|$ et pour tout $A \subseteq U$, $|\Gamma(A)|$, la taille du voisinage de A dans G est supérieure ou égale à $|A|$.

- *Dans la suite, si A désigne un ensemble de sommets et F un ensemble d'arêtes, $\Gamma_F(A)$ désigne l'ensemble des sommets v tels qu'il existe u dans A avec (u, v) dans F.*
  La condition de König-Hall *s'énonce ainsi :*

  $$\forall A \subseteq U,\ |\Gamma_E(A)| \geq |A|.$$

  On va prouver un résultat un peu plus général : il existe un couplage M tel que tout sommet de U soit l'extrémité d'une arête de M (un couplage de U dans U') si et seulement si la condition de König-Hall est vérifiée.

  Nécessité. *Si G admet un couplage M de U dans U', on a $|U| \leq |U'|$ et de plus pour tout $A \subseteq U$, $|\Gamma_E(A)| \geq |\Gamma_M(A)| = |A|$. Donc la condition de König-Hall est vérifiée.*

  Suffisance. *Pour prouver que la condition de König-Hall garantit l'existence d'un couplage de U dans U', on va procéder par l'absurde. Considérons un graphe biparti G vérifiant la condition de König-Hall, on va supposer qu'il n'existe pas de couplage de G couvrant complètement U. On va alors construire un sous-ensemble de U ne vérifiant pas la condition de König-Hall.*
  Considérons M un couplage maximal de G, et on note $\overline{M}$ son complémentaire $E \setminus M$. Par hypothèse, M n'est pas parfait et il existe au moins un sommet de U non couvert par M. On note x un tel sommet.
  On appelle chemin alternant *un chemin dans G tel que ses arêtes alternent entre M et $\overline{M}$; un tel chemin alterne également entre U et U', puisque le graphe est biparti donc toute arête fait changer d'ensemble. Si un tel chemin part de x, alors comme sa première arête est forcément dans $\overline{M}$, il suit le schéma suivant : sommet de U - arête de $\overline{M}$ - sommet de U' - arête de M - sommet de U...*
  On considère donc l'ensemble des chemins alternants partant de x. Supposons C un tel chemin maximal (i.e on ne peut pas le prolonger). Montrons que C ne peut pas se finir dans U' : si c'était le cas, sa première et sa dernière arête seraient dans $\overline{M}$, donc il contiendrait une arête de $\overline{M}$ de plus que d'arêtes de M, et comme le chemin est supposé maximal, son extrémité $y \in U'$ n'aurait aucune arête de M qui lui soit adjacente. Donc si on retirait de M toutes les arêtes de $C \cap M$ et qu'on ajoutait celles de $C \cap \overline{M}$, le résultat serait toujours un couplage, puisque tous les sommets intermédiaires de C perdrait une arête adjacente puis en gagnerait une nouvelle, et les sommets des bouts x et y gagnerait une arête adjacente alors qu'ils n'en avaient pas avant, donc aucun sommet n'aurait plus d'une arête du nouvel ensemble qui lui soit adjacente. Donc on obtiendrait un couplage de G strictement plus grand que M, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de maximalité de M. Ainsi, C se finit forcément dans U.
  Posons maintenant X l'ensemble des sommets de U reliés à x par un chemin alternant (y compris x lui-même) et Y l'ensemble des sommets de U' reliés à x par un chemin alternant. Si $x' \in X \setminus \{x\}$, alors un

chemin alternant reliant x à x' finit forcément par une arête de M, et cette arête de M relie x à un élément de Y (car il est sur un chemin alternant partant de x). Inversement, soit $y \in Y$, on sait par le paragraphe précédent qu'un chemin alternant entre x et y n'est pas maximal; on peut donc le continuer par une arête de M vers $x' \in X$.
Donc tout élément de $X \setminus \{x\}$ est relié dans M à un élément de Y et tout élément de Y est relié par M à un élément de $X \setminus \{x\}$; comme M est un couplage, et n'a donc jamais deux arêtes adjacentes à un même sommet, on en déduit que M donne une bijection entre Y et $X \setminus \{x\}$. En particulier, ça nous dit que $|X| = |Y| + 1$.
Or soit $x' \in X$ et y un de ses voisins. Soit l'arête entre x' et y est dans M, et dans ce cas $x' \neq x$ et le chemin alternant entre x et x', qui se termine forcément par l'arête de M adjacente à x', passe par y, donc $y \in Y$. Soit au contraire l'arête entre y et x' est dans $\overline{M}$, et dans ce cas tout chemin alternant entre x et x', qui termine par une arête de M, peut être prolongé en un chemin toujours alternant par cette arête, donc $y \in Y$.
Ainsi, on a montré que tout voisin d'un élément de X est dans Y, donc $\Gamma_E(X) \subseteq Y$.
On a donc montré que $|\Gamma_E(X)| \leqslant |Y| \leqslant |X| - 1 < |X|$, ce qui contredit le fait que le graphe G vérifie la condition de König-Hall.
Donc G admet un couplage parfait, et donc la condition de König-Hall suffit à garantir l'existence d'un tel couplage.

Dans un lycée, il y a exactement n filles et n garçons. Chaque fille (resp. garçon) apprécie exactement k garçons (resp. filles). La relation "apprécie" est réciproque. Montrer que l'on peut organiser k danses consécutives où chacun(e) dansera exactement une fois avec les k personnes qu'elle (il) apprécie.

- *On va coder ce problème sous la forme d'un graphe biparti $G = (S_1 \cup S_2, A)$ où les sommets S_1 représentent les filles du lycée et les sommets de S_2 les garçons, et une arête relie les sommets s_1 et s_2 ssi les personnes représentées s'apprécient.*
On cherche à montrer qu'on peut partitionner les arêtes de A en k couplages parfaits de G.

  On va montrer un résultat plus général : soit $G = (S_1 \cup S_2, A)$ un graphe biparti k-régulier (donc $|S_1| = |S_2|$, cf TD1), alors G admet un couplage parfait.
On va montrer que G respecte la condition de König-Hall. Soit $X \subseteq S_1$, notons Y l'ensemble des sommets de S_2 adjacents à au moins un sommet de X. On sait qu'il y a $l|X|$ arêtes entre X et Y, par régularité du graphe, mais on sait aussi que chaque sommet de Y reçoit au plus l de ces arêtes, donc la moyenne du nombre d'arêtes venant de X adjacentes à un sommet de Y est inférieure ou égale à l.
Or cette moyenne vaut $\frac{\text{nb d'arêtes entre } X \text{ et } Y}{|Y|}$, donc $l \geqslant \frac{l|X|}{|Y|}$, donc comme $l > 0$, on obtient $|Y| \geqslant |X|$.
Donc la condition de König-Hall est respectée et G admet un couplage parfait.

  Revenons à notre problème de sociabilité des lycéens. On applique le résultat qu'on vient de démontrer à G, avec $l = k$, et on en déduit que G admet un couplage parfait C_k. Or ce couplage parfait contient exactement une arête adjacente à chacun des sommets de G, donc si on retire les arêtes de C_k à G, on obtient un nouveau graphe biparti qui est cette fois-ci $(k-1)$-régulier : on peut donc lui trouver un couplage parfait C_{k-1}. En itérant cette démarche k fois, et en obtenant à chaque étape un graphe régulier dont les sommets sont tous du même degré situé entre k et 1, on obtient k couplages parfait $C_k, C_{k-1}, \ldots, C_1$ tous disjoints. Par cardinalité, ces couplages forment une partition de l'ensemble A, et correspond bien à k danses qui permettent à chaque lycéen de danse une fois avec chacune des k personnes qu'il apprécie.

10

Une couverture de G est un sous-ensemble des arêtes tel que tout sommet est adjacent à au moins une arête sélectionnée. Si le graphe est biparti, comment trouver une couverture de cardinal minimal en temps polynomial ?

- *On ajoute un sommet s relié à tous les sommets de S_1 et un sommet t tel que tous les sommets de S_2 y sont reliés.*
Comme d'habitude on met une capacité de 1 à toutes les arêtes entre S_1 et S_2. En revanche, à l'arête (s, s_1) avec $s_1 \in S_1$, on donne une capacité de $deg(s_1) - 1$; de même, on donne à l'arête (s_2, t) avec $s_2 \in S_2$ une capacité de $deg(s_2) - 1$. Ainsi, aucun flot entre s et t ne peut passer par toutes les arêtes du milieu adjacentes à un sommet de S_1 ou de S_2.
Considérons pour f un flot l'ensemble $C_f \subseteq E$ des arêtes du milieu non parcourues par ce flot, alors on remarque que tous les sommets de S_1 et S_2 sont adjacents à au moins une arête de C_f : C_f est donc bien une couverture de G.

De même, si on dispose d'une couverture de G, on peut en déduire un flot de s vers t tel qu'une arête entre S_1 et S_2 porte une unité de flot ssi elle n'est pas dans la couverture de G.
Il y a donc bijection entre les flots entre s et t et les couvertures de G, et la valeur du flot est égale à m (nombre d'arêtes de G) moins le cardinal de la couverture.
Donc trouver une couverture minimale revient à trouver un flot maximal et à choisir les arêtes qui ne sont pas parcourues par ce flot.