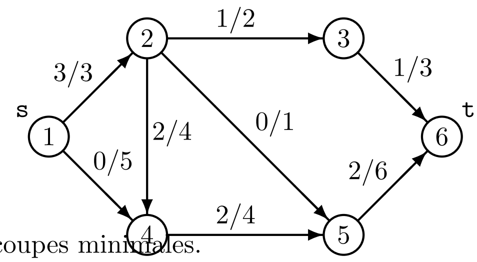
Feuille de TD N^o 5 : Flots

1

Le réseau de transport $G(S, A, C, \mathtt{s}, \mathtt{t})$ ci-dessous, avec $\mathtt{s} = 1$ (la source), $\mathtt{t} = 6$ (le puits) et un flot ϕ de débit 3. Dans le couple de valeurs numériques sur chaque arc, le premier nombre désigne le flot et le second, la capacité.



1. Donner le graphe d'écart $G^e(\phi)$ associé à ϕ.
2. Trouver un chemin de $\mathtt{s}$ à $\mathtt{t}$ dans $G^e(\phi)$.
3. Comment peut-on augmenter le flot dans G ?
4. Calculer le flot maximal
5. Donner une coupe minimale

- Ca ajoute un flot de 4 en 3 etapes. Notez qu'il y a deux coupes minimales.

2

ouvrier(s)	qualifié(s) pour
x_1	y_1, y_2, y_4
x_2	y_1, y_2, y_4
x_3	y_1, y_2, y_4, y_7
x_4	y_2, y_3, y_4, y_5, y_6
x_5	y_2, y_4
x_6	y_3, y_4, y_5, y_6, y_7
x_7	y_5, y_6, y_7

Une entreprise employant sept ouvriers $x_1, \ldots, x_7$ doit effectuer sept travaux $y_1, \ldots, y_7$. Le tableau ci-contre donne les différentes affectations possibles : L'entreprise peut-elle réaliser les sept travaux ? Dans l'affirmative, comment doit-elle affecter les ouvriers aux postes de travail ? x_1 préférerait faire y_4, et x_4 préférerait faire y_2. Peut-on satisfaire leurs souhaits ?

- ramener le probleme a un couplage dans un biparti, on tombe sur le probleme precedent avec une arete en plus qui debloque. onpeut satisasfaire x1 mais pas x4

3

Soit $\langle S, A, C, s, t\rangle$ un réseau de transport sur lequel on dispose d'un flot maximum f.

1) On incrémente la capacité de $(u, v) \in A$: $c(u, v) \leftarrow c(u, v) + 1$. Donner un algorithme linéaire qui prend en argument (S, A, c, s, t) et f et calcule un flot maximum f' pour le réseau où la capacité de l'arc (u, v) a été incrémentée.

2) On décrémente la capacité de $(u, v) \in A$: $c(u, v) \leftarrow c(u, v) - 1$. Donner un algorithme linéaire qui prend en argument (S, A, c, s, t) et f et calcule un flot maximum f' pour le réseau où la capacité de l'arc (u, v) a été décrémentée.

- On suppose toutes les capacites entieres.

  1) a)On considere le graphe residuel $G_f = (V, E_f)$ defini par le flot f. Si dans ce graphe residuel il existe un chemin p de s a u et un chemin p' de v a t, alors $(p, (u, v), p')$ est un chemin augmentant du graphe residuel defini par le flot f et le reseau ou la capacite de (u, v) a ete incrementee. La capacite residuelle de ce chemin est de 1. Si on augmente le flot de 1 en utilisant ce chemin augmentant, on sature la coupe minimale formee a partir des sommets accessibles a partir de s dans le reseau residuel defini par la nouvelle capacite.

  b) Reciproquement s'il n'y a pas de chemin de s a u dans le graphe residuel $G_f = (V, E_f)$ defini par le flot f ou s'il n'y a pas de chemin de v a t dans le graphe residuel $G_f = (V, E_f)$, l'incrementation de la capacite de l'arc (u, v) ne permet de construire un chemin augmentant dans le nouveau graphe residuel, le flot f est alors maximal dans le reseau ou la capacite de (u, v) a ete augmentee.

  c) L'algorithme consiste juste a chercher un chemin de s a u et un chemin de v a t dans le graphe residuel G_f. N'importe quel parcours realise cela en $O(|E| + |V|)$.

  2) L'algorithme consiste e chercher un $s-t$ chemin passant par l'arc (u, v) dans le graphe partiel defini par les arcs portant un flot de valeur superieure ou egale a 1 (c'est-a-dire un chemin p de s a u et un chemin p' de v a t). Cela se fait en $O(|E| + |V|)$ operations grace a deux parcours issus de s et v respectivement. On repousse alors une unite de flot le long du $(s-t)$ -chemin $(p, (u, v), p')$. On obtient un flot f'. On recherche un chemin augmentant dans le graphe residuel defini par f' sur le reseau ou la capacite de (u, v) a ete decrementee. S'il n'y a pas de chemin augmentant, f' est un flot maximum dans le nouveau reseau. S'il y a un chemin augmentant, sa capacite residuelle est au moins 1 (en fait egale a 1), en augmentant f' grace a ce chemin, on obtient un flot f'' de valeur superieure ou egale a celle de f. Comme la valeur du flot maximum dans le

4 Généralisations

On propose deux généralisations au problème du flot max :

(1) Il peut y avoir plusieurs sources $s_1, s_2, \dots s_m$ et plusieurs puits $t_1, t_2, \dots t_\ell$.

(2) Non seulement les arcs mais aussi les sommets ont des capacités.

Comment utiliser un logiciel qui résoud le problème du flot maximum classique pour résoudre un problème de flot maximum généralisé ?

5 distribution de jouets

Un comité d'entreprise a décidé de distribuer de petits jouets aux enfants des salariés pour Noël.

Il a en sa possession différents jouets J_1, ..., J_p, chaque jouet J_i étant disponible en n_i exemplaires.

Il y a k enfants $e_1, ..., e_k$.

Le comité d'entreprise a fait une enquête auprès des parents, qui ont donné le sexe, l'age, les jouets déjà en possession et les goûts de leur(s) enfant(s), ce qui a permis de savoir pour chaque jouet J_i et chaque enfant e_h si le jouet convenait pour l'enfant.

Le comité a décidé de donner un paquet cadeau de P jouets à chaque enfant.

Il est évidemment hors de question de distribuer deux fois le même jouet à un même enfant.

On veut un algorithme qui permette au comité de trouver une manière de composer les paquets cadeaux (ou qui détecte que ce n'est pas possible). Expliquer comment ramener ce problème à un problème de graphes qui se resoud en temps polynomial.

On ajoute une nouvelle contrainte: des enfants qui sont frères ou soeurs l'un de l'autre doivent recevoir des jouets tous différents.

Expliquer comment intégrer cette nouvelle contrainte.

6

Soient π_1 et π_2 deux partitions d'un ensemble X à m éléments, chaque partition étant constituée de r classes disjointes. On voudrait trouver un ensemble $Y \subset X$, à r éléments tel que pour chaque classe C de π_1 ou de π_2, il existe un élément de $y \in Y$ qui appartienne (représente) C.
Est-ce toujours possible ? Donner un algorithme efficace pour résoudre ce problème.

- Dans la solution, on appellera un ensemble $Y \subseteq X$ a r elements tel que chaque classe C de π_1 ou de π_2 ait un element dans Y, un ensemble de *representants.*
  Il n'existe pas toujours d'ensemble de representants. En effet, choisissons $X = \{a, b, c, d\}$ et $\pi_1 = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\big\}$ alors que $\pi_2 = \big\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\big\}$. Il n'existe pas d'ensemble Y a trois elements capable de representer les deux partitions.

  Pour decider si deux partitions admettent un systeme de representants, on peut appliquer une methode brutale: enumerer les sous-ensembles de X a r elements et verifier si l'un d'entre eux convient. Le cout de ce genre d'algorithme est proportionnel a

  $$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

  c'est prohibitif.

  Pour resoudre decemment le probleme, on le reduit au probleme de la detection de l'existence d'un couplage parfait dans un graphe biparti (que nous savons resoudre grace aux methodes de construction de flot maximum). On construit un graphe biparti $G = (V \cup V', E)$ de la facon suivante. A chaque classe de π_1 (resp. π_2) on associe un sommet de V (resp. V'), le graphe a donc $2r$ sommets. Si $v \in V$ est associe a la classe C de π_1 et si $v' \in V'$ est associe a la classe C' de π_2, et si $x \in C \cap C'$, alors on place une arete etiquetee par x entre v et v'. Le graphe construit de cette maniere, ou deux sommets peuvent etre relies par plusieurs aretes est un multigraphe. le multigraphe comporte n aretes.

  Il suffit maintenant de verifier que tout systeme de representants definit un couplage parfait dans le graphe biparti, et que reciproquement en collectant les etiquettes des aretes, on peut construire un systeme de representants a partir d'un couplage parfait dans le biparti.

7

L'étudiant Z propose l'algorithme suivant pour calculer la valeur du flot maximal dans un réseau $G(S, A, C, \mathtt{s}, \mathtt{t})$: On regarde toutes les coupes possibles et on prend la valeur minimale des capacités de ces coupes. Qu'en pensez-vous ?

- c'est correct grace au theorme flot max = coupe min mais comme il y a 2^{n-2} coupes possibles, c'est de complexite rhedibitoire

8 Dictateur K

(examen de 2011...) Dans un pays L, des rebelles ont pris possession d'une ville B. Le dictateur du pays K a positionné des chars dans le désert, autour de B. Les chars ne peuvent emprunter que le graphe du réseau routier. Une coalition internationale O décide de soutenir les rebelles en bombardant des tronçons de route, de sorte qu'aucun char ne puisse plus accéder à B. Pour chaque tronçon de route, O a attribué un coût (qui tient compte des risques, de la quantité d'explosif nécessaire pour neutraliser la route, etc.) Comment déterminer efficacement l'ensemble des routes qu'il faut bombarder pour empêcher K d'accéder à B tout en minimisant la somme des coûts ?

- POurquoi un exo de 2011 ? IL y a une raison ... reviser son histoire ! il faut trouver une coupe min, donc chercher un flot max et en deduire une coupe min

9

Montrez qu'un graphe biparti ($G = (U \cup U', E)$ admet un couplage parfait si et seulement si $|U| = |U'|$ et pour tout $A \subseteq U$, $|\Gamma(A)|$, la taille du voisinage de A dans G est supérieure ou égale à $|A|$.

- Dans la suite si A designe un ensemble de sommets et F un ensemble d'aretes, $\Gamma_F(A)$ designe l'ensemble des sommets v tels qu'il existe u dans A avec (u, v) dans F.

  La *condition de Konig-Hall* s'nonce:
  $$\forall A \subseteq U,\ |\Gamma_E(A)| \geq |A|.$$
  On va prouver un resultat un peu plus general: *il existe un couplage M tel que tout sommet de U soit l'extremite d'une arete de M (un couplage de U dans U') si et seulement si la condition de Konig-Hall est verifiee.*

  Necessite. Si G admet un couplage M de U dans U' , on a $|U| \leq |U'|$ et de plus pour tout $A \subseteq U$, $|\Gamma_E(A)| \geq |\Gamma_M(A)| = |A|$. Donc la condition de Konig-Hall est verifiee.

  Suffisance. Pour prouver que la condition de Konig-Hall garantit l'existence d'un couplage de U dans U', on va proceder par induction sur $|U|$. C'est trivialement vrai pour $|U| = 1$.

  Supposons que ce soit vrai lorsque $|U| \leq n$, et considerons un graphe verifiant la condition de Konig-Hall avec $|U| = n + 1$. Distinguons un sommet x dans U, notons $A = U \setminus \{x\}$. D'apres l'hypothese d'induction, comme le sous-graphe induit par $A \cup U'$ satisfait la condition de Konig-Hall, il existe un couplage M de A dans U'.

  Si $\Gamma_E(\{x\}) \not\subseteq \Gamma_M(A)$, soit y un sommet de $\Gamma_E(\{x\})$ qui n'est pas l'extremite d'une arete de M, en ajoutant (x, y) a M, on obtient un couplage de $U = \{x\} \cup A$ dans U'.

  Si $\Gamma_E(\{x\}) \subseteq \Gamma_M(A)$, comme le graphe verifie la condition de Konig-Hall, on a $|\Gamma_E(U)| \geq |U| > |\Gamma_M(A)|$ donc il existe z dans $\Gamma_E(A) \setminus \Gamma_M(A)$. Soit y un sommet de A qui est adjacent a z. Le sous-graphe induit par $U \setminus \{y\} \cup U'$ satisfait la condition de Konig-Hall, on peut donc lui appliquer l'hypothese de recurrence. Il existe donc un couplage M' de $U \setminus \{y\}$ dans U'. Considerons le graphe partiel defini par les aretes de $M \cup M'$, sur l'ensemble des sommets $U \cup U'$. Dans ce graphe partiel, x et y sont de degre 1, et tout sommet de $U \setminus \{x, y\}$ sont de degre 1 (s'il est adjacent a la meme arete dans M et dans M') ou 2 (dans ce cas il est adjacent a une arete de M et a une arete de M'). Un sommet de U' est de degra $0, 1$, ou 2. Ce graphe partiel est donc constitua de cycles simples et de chemin simples.

  considerons $B := \Gamma_M(\Gamma_E\{x\})$ l'ensemble des sommets de A (donc de U) qui sont voisins par le couplage M des voisins de x dans G. Il faut distinguer deux cas.

  Si $B = \Gamma_M(\Gamma_E\{x\}) \neq A$, alors $|B \cup \{x\}| \leq n$ et on peut donc appliquer l'hypothese d'induction au sous-graphe induit par $B \cup \{x\} \cup U'$, qui verifie lui aussi la condition de Konig-Hall. Soit M' un couplage de $B \cup \{x\}$ dans U'. Considerons le graphe partiel defini par les aretes de $M \cup M'$. Dans ce graphe partiel, x est de degre 1, tout sommet de B est de degre 1 (s'il est adjacent a la meme arete dans M et dans M') ou 2. Un sommet de U' est de degre $0, 1$, ou 2.

  Considrons un chemin maximal p issu de x dans ce graphe partiel. Ce chemin est simple, comme x est de degre 1, s'il comportait un cycle (un lasso), il y aurait un sommet de degre au moins 3 dans le graphe partiel ce qui est impossible. C'est un chemin *alternant.* Il passe alternativement par un sommet de U et un sommet de U' et par une arete de M et une arete de M'. Il commence en x par l'arete de M', adjacente *a* x, puis il se prolonge par une arete de M. A chaque etape, on a un seul choix. Il se termine par une arete de M' et un sommet z de U'. En effet s'il se terminait par un sommet de U, ce sommet serait adjacent a la meme arete dans M et dans M', et en regardant au sommet precedent, on aurait deux aretes de M adjacentes. Dans le chemin alternant p, les aretes de M' sont donc plus nombreuses que les aretes de M.
  Pour finir, on construit un nouveau couplage, en enlevant a M les aretes de $p \cap M$ et ajoutant celles de $p \cap M'$. Ceci definit un couplage de U dans U'.

  Si $B = \Gamma_M(\Gamma_E\{x\}) = A$, il faut proceder un peu differemment. Comme le graphe verifie la condition de Konig-Hall, on a $|\Gamma_E(U)| \geq |U| > |\Gamma_M(A)|$ donc il existe z dans $\Gamma_E(A) \setminus \Gamma_M(A)$. Soit y un sommet de A qui forme par les aretes de M, de M' et $\{y, z\}$, (dans ce graphe x est de degre 1, et tous les autres sommets de U sont de degre 2 ou 1 s'ils sont adjacents a la meme arete par M et M').

Dans un lycée, il y a exactement n filles et n garçons. Chaque fille (resp. garçon) apprécie exactement k garçons (resp. filles). La relation "apprécie" est réciproque. Montrer que l'on peut organiser k danses consécutives où chacun(e) dansera exactement une fois avec les k personnes qu'elle (il) apprécie.

- On code le probleme a l'aide d'un graphe biparti $G = (U \cup U', E)$ ou U' designe les sommets filles et U les sommets "garcons". Il existe une arete entre u et v si la fille u et le garcon v s'apprecient. Le probleme revient a montrer que si G est k regulier, on peut partitionner E en k couplages parfaits $M_1, M_2, \ldots M_k$.

  Remarquons d'abord que si G admet un couplage parfait M, alors $(U \cup U', E \setminus M)$ est $k-1$-regulier. Si on sait prouver que tout graphe biparti k-regulier ($k \geq 1$) admet un couplage parfait, la reponse se deduira par recurrence sur k.

  L'existence d'un couplage parfait dans un graphe biparti k-regulier se deduit du theoreme de Konig-Hall (voir exercice precedent de cette feuille). En effet si A est une partie de U, si on avait $|\Gamma(A)| < |A|$, alors le nombre d'aretes adjacentes a $\Gamma(A)$ serait au moins $k|A|$ et donc un sommet de $\Gamma(A)$ serait de degre superieur a k.

10

Une couverture de G est un sous-ensemble des arêtes tel que tout sommet est adjacent à au moins une arête sélectionnée. Si le graphe est biparti, comment trouver une couverture de cardinal minimal en temps polynomial ?

- faire la construction usuelle des bipartis. mettre capcaite 1 au milieu, degre(x)-1 a gauche et a droite. Un flot correspond aux aretes non selectionnees de la couverture. On est ramene au flot max.