Complexes de sous-mots acycliques dans les groupes de Coxeter

Noémie Cartier

30 avril 2021

Définition

Un groupe de Coxeter W est défini par :

- *S un ensemble de générateur*
- *M indexée sur S une matrice symétrique d'entiers strictement positifs telle que pour $s, t \in S$, $M_{s,t} = 1$ ssi $s = t$.*

La matrice M donne l'ordre de l'élément st.

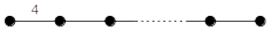
On représente généralement cette matrice par le *diagramme de Coxeter* du groupe, où une arête entre s et t dit que $M_{s,t} > 2$. On étiquette l'arête par cette valeur si elle est différente de 3.

Dans la suite, on s'intéresse uniquement aux groupes de Coxeter finis.

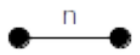
Exemples de familles de groupes de Coxeter finis :

- type A : groupe symétrique, ou groupe des isométries du tétraèdre : $S = \{(i, i+1) \mid i \in [\![1, n-1]\!]\}$ et diagramme de la forme

- type B : groupe des permutations signées, ou groupe des isométries du cube : $S = \{(1, -1)\} \cup \{(i, i+1) \mid i \in [\![1, n-1]\!]\}$ et diagramme de la forme



- groupe diédral : groupe des isométries du n-gone : diagramme de la forme



De manière équivalente :

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un groupe de Coxeter W fini est un groupe fini de transformations linéaires de E généré par un ensemble de réflexions.

De manière équivalente :

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un groupe de Coxeter W fini est un groupe fini de transformations linéaires de E généré par un ensemble de réflexions.

Définition

Un système de racines de W est un sous-ensemble Φ de E tel que :

- *si $\alpha \in \Phi$ alors $\Phi \cap \alpha\mathbb{R} = \{\alpha, -\alpha\}$;*
- *pour tout $w \in W$, $w\Phi = \Phi$.*

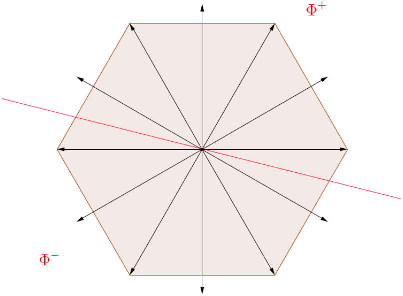
Un tel système existe pour tout groupe de Coxeter fini W.
Les racines correspondent aux réflexions de W.
On partitionne le système en Φ^+ et Φ^- (racines positives et négatives) de telle façon que les deux ensembles soient séparés par un hyperplan.

Groupe symétrique :

- $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ devient $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$;
- réflexions : transpositions (i, j), perpendiculairement aux hyperplans $x_i = x_j$;
- racines : $\{e_i - e_j \mid i \neq j\}$; $e_i - e_j$ positive ssi $i < j$.

On se ramène à $\mathbb{R}^{n-1}$ en projetant sur l'hyperplan $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Groupe diédral :



Soit W un groupe de Coxeter muni d'un système de racines Φ. On suppose que les seuls sous-espaces de E stables par W sont $\{0\}$ et E.

Définition

Pour toute partition de Φ en racines positives et négatives, il existe un unique sous-ensemble Δ de Φ^+ tel que Δ est une base de l'espace E et les coefficients de l'écriture d'un élément de Φ dans cette base sont soit tous positifs (dans Φ^+), soit tous négatifs (dans Φ^-).
Les éléments de Δ sont alors dits racines simples de W.

Soit W un groupe de Coxeter muni d'un système de racines Φ. On suppose que les seuls sous-espaces de E stables par W sont $\{0\}$ et E.

Définition

Pour toute partition de Φ en racines positives et négatives, il existe un unique sous-ensemble Δ de Φ^+ tel que Δ est une base de l'espace E et les coefficients de l'écriture d'un élément de Φ dans cette base sont soit tous positifs (dans Φ^+), soit tous négatifs (dans Φ^-).
Les éléments de Δ sont alors dits racines simples de W.

Proposition

Soit Δ un système de racines simples, alors $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ génère W.

Soit W un groupe de Coxeter muni d'un système de racines Φ. On suppose que les seuls sous-espaces de E stables par W sont $\{0\}$ et E.

Définition

Pour toute partition de Φ en racines positives et négatives, il existe un unique sous-ensemble Δ de Φ^+ tel que Δ est une base de l'espace E et les coefficients de l'écriture d'un élément de Φ dans cette base sont soit tous positifs (dans Φ^+), soit tous négatifs (dans Φ^-).
Les éléments de Δ sont alors dits racines simples de W.

Proposition

Soit Δ un système de racines simples, alors $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ génère W.

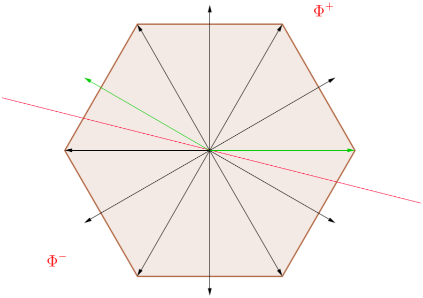
Proposition

Tous les systèmes de racines positifs et leur système de racines simples sont conjugués les uns des autres.

Groupe symétrique :

- générateurs : les transpositions simples $(i, i+1)$, avec $i \in [\![1, n-1]\!]$
- racines simples : $e_i - e_{i+1}$, avec $i \in [\![1, n-1]\!]$

Groupe diédral :



Proposition

Soient $v, w \in W$ deux éléments du groupe, les énoncés suivants sont équivalents :

- $v = w$;
- $v(\Phi^+) = w(\Phi^+)$;
- $v(\Delta) = w(\Delta)$.

En particulier, on peut caractériser $w \in W$ par l'ensemble $w(\Phi^+)$, ou encore par l'ensemble $w(\Phi^-) \cap \Phi^+$.

Pour $w \in W$, on dit que $w(\Phi^-) \cap \Phi^+$ est l'ensemble des inversions de w, noté $\mathrm{inv}(w)$.

On fixe W groupe de Coxeter fini, un système de racines Φ et un sous-système de racines simples Δ. On note $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$, c'est un ensemble de réflexions qui génère W.

Définition

Une suite finie $Q = Q_1 Q_2 \ldots Q_k$ d'éléments de S est appelée mot ou expression. On dit que Q représente l'élément de W donné par le produit des Q_i.
Soit $w \in W$, la longueur de w est la longueur minimale d'un mot le représentant.
Un mot est dit réduit si sa longueur est égale à celle de l'élément qu'il représente. Tout mot non réduit possède au moins une paire de lettres qu'on peut lui retirer sans modifier l'élément qu'il représente (opération de simplification).

On fixe W groupe de Coxeter fini, un système de racines Φ et un sous-système de racines simples Δ. On note $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$, c'est un ensemble de réflexions qui génère W.

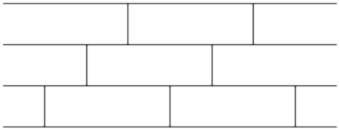
Définition

Une suite finie $Q = Q_1 Q_2 \dots Q_k$ d'éléments de S est appelée mot ou expression. On dit que Q représente l'élément de W donné par le produit des Q_i. Soit $w \in W$, la longueur de w est la longueur minimale d'un mot le représentant. Un mot est dit réduit si sa longueur est égale à celle de l'élément qu'il représente. Tout mot non réduit possède au moins une paire de lettres qu'on peut lui retirer sans modifier l'élément qu'il représente (opération de simplification).

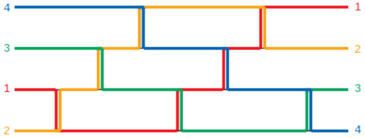
Proposition

La longueur d'un élément $w \in W$ est donnée par le cardinal de $\mathrm{inv}(w)$. On note w_0 l'unique élément de W de longueur maximale (i.e. tel que $w_0(\Phi^+) = \Phi^-$).

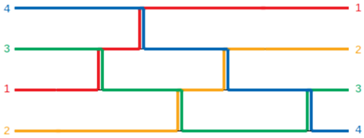
Pour le groupe symétrique, on représentera un mot par un réseau de tri.



Pour le groupe symétrique, on représentera un mot par un réseau de tri.



Pour le groupe symétrique, on représentera un mot par un réseau de tri.



Définition

Soit Q un mot quelconque de W composé de n caractères. Un sous-mot m de Q est une sous-séquence $Q_{m_1}, \ldots, Q_{m_k}$ de Q.

On s'intéressera particulièrement aux sous-mots *réduits*.

Définition

Soit Q un mot quelconque de W composé de n caractères. Un sous-mot m de Q est une sous-séquence $Q_{m_1}, \dots, Q_{m_k}$ de Q.

On s'intéressera particulièrement aux sous-mots *réduits*.

Définition

Soit Q un mot, la fonction racine sur Q est donnée pour m sous-mot de Q et $i \in [\![1, n]\!]$ par

$$r(m, i) = Q_{m_1} \dots Q_{m_j}(\alpha_i)$$

avec α_i la racine associée à la réflexion simple Q_i et m_j maximal tel que $m_j < i$.

Définition

Soit Q un mot quelconque de W composé de n caractères. Un sous-mot m de Q est une sous-séquence $Q_{m_1}, \dots, Q_{m_k}$ de Q.

On s'intéressera particulièrement aux sous-mots *réduits*.

Définition

Soit Q un mot, la fonction racine sur Q est donnée pour m sous-mot de Q et $i \in [\![1, n]\!]$ par

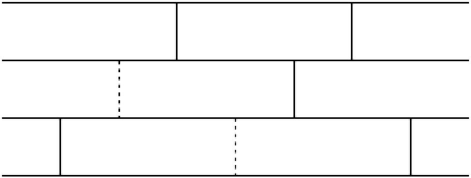
$$r(m, i) = Q_{m_1} \dots Q_{m_j}(\alpha_i)$$

avec α_i la racine associée à la réflexion simple Q_i et m_j maximal tel que $m_j < i$.

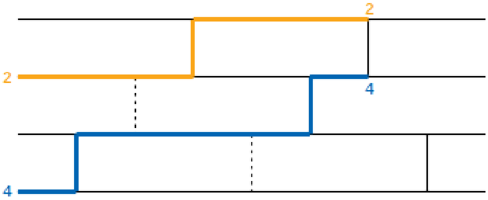
Proposition

Soit Q un mot et m un sous-mot réduit de Q représentant w, alors $inv(w) = \{r(m, m_i) \mid i \in [\![1, k]\!]\}$.

Dans cette situation, la fonction racine donne la paire de positions où sortent la paire de tuyaux qui passent sur une barre verticale.



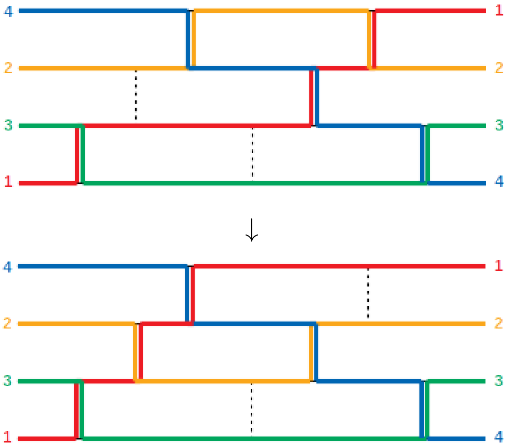
Dans cette situation, la fonction racine donne la paire de positions où sortent la paire de tuyaux qui passent sur une barre verticale.



Définition et propriété

Soit m un sous-mot de Q représentant w, soit $\alpha \in inv(w)$, alors on sait qu'il existe i tel que $r(m, m_i) = \alpha$.
Si il existe $j \notin m$ tel que $r(m, j) = \pm\alpha$, la condition d'échange dit que $(m \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ est aussi un sous-mot de Q représentant w.
De plus, comme le cardinal ne change pas, si le sous-mot était réduit, alors il l'est toujours après cette opération.
On appelle cette opération un flip ; si $i > j$, le flip est dit ascendant, et sinon il est dit descendant.

Dans les réseaux de tri, ça correspond à trouver un croisement et un contact concernant les deux mêmes tuyaux et à les échanger.



Définition

Soit Q un mot et m un sous-mot, la configuration racine de m est l'ensemble $\mathbf{R}(m) = \{r(m,i) \mid i \notin m\}$.
Un sous-mot est dit acyclique si sa configuration racine est incluse dans un demi-espace strict de E.

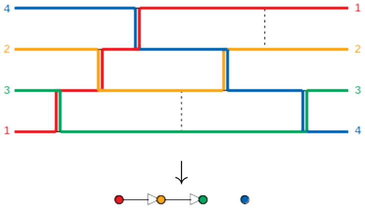
Définition

Soit Q un mot et m un sous-mot, la configuration racine de m est l'ensemble $\mathbf{R}(m) = \{r(m,i) \mid i \notin m\}$.
Un sous-mot est dit acyclique si sa configuration racine est incluse dans un demi-espace strict de E.

Définition

On fixe Q et $w \in W$. On appelle complexe de sous-mots acyclique de w sur Q l'ensemble des sous-mots de Q réduits acycliques qui représentent w.
On le munit de l'ordre des flips, dont les couvertures sont données par les flips ascendants.

Dans le cas des réseaux de tri, on construit le *graphe de contact*.



Le sous-mot est acyclique ssi le graphe de contact l'est.

Conjecture

On se place sur un mot Q représentant w_0 l'élément le plus long de W construit à partir d'un élément de Coxeter de W.
Pour tout $w \in W$, l'ordre des flips sur le complexe de sous-mots acyclique de w sur Q est un treillis.

Définition

Sur un groupe de Coxeter, on définit le treillis de l'ordre faible de deux façons équivalentes : pour $w, w' \in W$, on a $w \preceq w'$ ssi :

- $\mathrm{inv}(w) \subseteq \mathrm{inv}(w')$;
- *il existe un mot réduit représentant w et un mot réduit représentant w' tels que le premier est un préfixe du second.*

Conjecture

Pour Q comme décrit précédemment, il existe une fonction ins *des éléments de W inférieurs à w par l'ordre faible vers le complexe de sous-mots de w sur Q définie par* $\mathrm{ins}(\pi) = m \iff \mathbf{R}(m) \subseteq \pi(\Phi^+)$.
Cette fonction est surjective et c'est un quotient de treillis.

Théorème

Soit Q un mot quelconque sur W et $w \in W$ tel qu'il existe une écriture de w qui soit un sous-mot de Q.
Alors l'algorithme suivant permet pour tout $\pi \in W$ inférieur à w dans l'ordre faible de construire un sous-mot de Q représentant w tel que sa configuration racine est incluse dans $\pi(\Phi^+)$.

```
Demazure-sous-w(x, T, w) :
    x_curr ← x
    Pour i dans T :
        Si x_curr π_i ⩽ w alors
            x_curr ← x_curr π_i
    Renvoyer x_curr
```

$\texttt{Insertion}(Q, w, \pi)$:

$\quad n \leftarrow \texttt{longueur}(Q)$

$\quad w_{curr} \leftarrow ()$

$\quad m \leftarrow [\,]$

$\quad \texttt{Pour}\ \ i = 1\ \ \texttt{à}\ \ n$:

$\quad\quad \alpha \leftarrow r(m, i)$

$\quad\quad \texttt{Si}\ \ \alpha \in w(\Phi^-)\ \ \texttt{alors}$

$\quad\quad\quad \texttt{Si}\ \ \alpha \in \pi(\Phi^+)\ \ \texttt{alors}$

$\quad\quad\quad\quad p \leftarrow \texttt{Demazure-sous-w}(w_{curr}, Q[i+1:], w)$

$\quad\quad\quad\quad \texttt{Si}\ \ p \neq w\ \ \texttt{alors}$

$\quad\quad\quad\quad\quad \texttt{ajouter}\ \ i\ \ \texttt{à}\ \ m$

$\quad\quad\quad\quad\quad w_{curr} \leftarrow w_{curr}(s_{Q[i]})$

$\quad\quad\quad \texttt{Sinon}$

$\quad\quad\quad\quad \texttt{ajouter}\ \ i\ \ \texttt{à}\ \ m$

$\quad\quad\quad\quad w_{curr} \leftarrow w_{curr}(s_{Q[i]})$

Soit α la fonction racine en l'indice i, on distingue quatre cas :

1. si $\alpha \in w(\Phi^+)$, on ne fait rien ;
2. si $\alpha \in w(\Phi^-)$ et $\alpha \in \pi(\Phi^-)$, on ajoute i à m ;
3. si $\alpha \in w(\Phi^-)$ et $\alpha \in \pi(\Phi^+)$, on cherche si on peut compléter m en un sous-mot représentant w sans utiliser i :
   - a si oui, on ne fait rien ;
   - b si non, on ajoute i à m.

Il reste à montrer :

- que l'insertion est bien une fonction (i.e chaque élément a une unique image) ;
- que cette fonction est surjective ;
- que la fonction en question est bien un morphisme de treillis.

Merci pour votre attention !